# PROBLÈME 1

*La partie* I, *la partie* II 1.-2. *et la partie* III 1.-2.-3.-4. *peuvent être traitées indépendamment.*

Soit $\varphi$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = x(x-1) = x^2 - x$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P_0(x) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \frac{d^n(\varphi^n)}{dx^n} = \frac{d^n((x^2-x)^n)}{dx^n}$$

## Partie I

Dans cette partie, on étudie les propriétés des polynômes $P_n$.

1. Calculer $P_0$, $P_1$, $P_2$ et déterminer leurs racines. Calculer $\int_0^1 P_i(x)dx$, pour $i = 1$ et $i = 2$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n$ est un polynôme de degré $n$, dont on précisera le coefficient dominant.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On suppose dans la suite de cette partie que $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Montrer que pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{d^j(\varphi^n)}{dx^j}$ est un polynôme de degré $2n-j$. Montrer que 0 et 1 sont des racines de ce polynôme d'ordre de multiplicité au moins $n-j$.
   (b) Montrer que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\frac{d^j(\varphi^n)}{dx^j}$ admet au moins $j$ racines distinctes dans l'intervalle $]0, 1[$.
   (c) Montrer que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\frac{d^j(\varphi^n)}{dx^j}$ admet exactement $j$ racines simples dans $]0, 1[$.(En particulier, $P_n$ admet exactement $n$ racines simples dans $]0, 1[$).
4. (a) A l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,
   $$\int_0^1 P_n(x)P_k(x)dx = 0$$
   (b) En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,
   $$\int_0^1 P_n(x)Q(x)dx = 0$$

## Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < 1$ $n$ réels distincts de l'intervalle $]0, 1[$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit

$$L_i(x) = (x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n) = \prod_{1 \le j \le n, j \ne i} (x-x_j)$$

1. (a) Vérifier que $L_i$ est un polynôme de degré $n-1$ pour lequel $L_i(x_i) \neq 0$. Calculer $L_i(x_j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$, $j \neq i$.
   (b) Montrer que la famille $(L_i)_{1 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une unique famille $(\beta_i)_{1 \le i \le n}$ de réels, dont on donnera l'expression en fonction des polynômes $(L_i)_{1 \le i \le n}$, telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a
   $$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i P(x_i) \qquad \text{(A)}$$
3. On suppose que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les $n$ racines du polynôme $P_n$ défini dans la partie I. Montrer que l'égalité (A) ci-dessus est alors vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. (*On pourra utiliser la division euclidienne de* $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ *par le polynôme* $P_n$).
4. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$,
   $$\int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{2}P(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}) + \frac{1}{2}P(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}).$$

## Partie III

Dans cette partie, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue fixée.
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$G(P) = \int_0^1 (f(x) - P(x))^2 dx$$

Le but de la partie III est de montrer qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ réalisant le minimum de $G$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, c'est à dire tel que la propriété (B) ci-dessous soit satisfaite:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad G(P) \ge G(P_f) \qquad \text{(B)}$$

1. Montrer que $G$ définit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_+$ et que
   $$G(P) = 0 \Leftrightarrow P(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in [0, 1]$$
   En déduire que si $f$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, le minimum de $G$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est nul et qu'il est atteint en l'unique polynôme $P_f = f$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que pour tous polynômes $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$G(P+\lambda Q) = a\lambda^2 - 2b\lambda + c$$

avec

$$a = \int_0^1 Q^2(x)dx, \quad b = \int_0^1 (f(x) - P(x))Q(x)dx, \quad c = G(P)$$

3. On suppose qu'il existe un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que la propriété (B) soit satisfaite.

   (a) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $g(\lambda) = G(P_f + \lambda Q)$. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ainsi définie atteint son minimum en $\lambda = 0$.

   (b) En utilisant l'expression obtenue à la question 2, en déduire que l'on a

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 (f(x) - P_f(x))Q(x)dx = 0$$

4. On suppose à présent qu'il existe un polynôme $P^* \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 (f(x) - P^*(x))Q(x)dx = 0. \tag{C}$$

   (a) Montrer que l'on a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$$G(P^* + \lambda Q) \geq G(P^*)$$

   (b) Montrer que $P^*$ satisfait la propriété (B).

5. Montrer que $P^*$ satisfait la propriété (C) si et seulement si

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^1 P^*(x)P_j(x)dx = \int_0^1 f(x)P_j(x)dx,$$

   où les polynômes $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ont été définis dans la partie I.

6. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P^* \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la propriété (C). On cherchera $P^*$ sous la forme $P^*(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i(X)$.

7. Conclure sur l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la propriété (B).

8. Dans cette question, on prend $f(x) = e^x$ et $n = 1$. Déterminer $P_f$.

9. Soit $P_f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ l'écriture de $P_f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $\gamma_k = \int_0^1 f(x)x^k dx$. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{a_l}{l+k+1} = \gamma_k$$

10. En déduire que si l'on pose $m_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$, la matrice $A$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $A = [m_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n+1}$ est inversible.

## PROBLÈME 2

Un joueur lance à pile ou face une pièce telle que la probabilité d'obtenir *Face* lors d'un lancer soit $p \in ]0,1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir *Face* et compte le nombre $X$ de lancers nécessaires. On considère que les lancers sont indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X$? Calculer $P(X > a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Dans la suite du problème, on considère $n$ joueurs ($n \in \mathbb{N}^*$) jouant simultanément au jeu décrit ci-dessus, indépendamment les uns des autres. La probabilité $p \in ]0,1[$ d'obtenir *Face* au cours d'un lancer est la même pour tous les joueurs. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour que le joueur $i$ obtienne *Face*.

2. Quelle est la loi de $X_i$?

3. On pose $A_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$. Soit $F_n$ la fonction de répartition de $A_n$.
   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$F_n(a) = 1 - (1-p)^{na}$$

   Quelle est la loi de $A_n$? Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$$

   Comment interpréter ce résultat?

4. On pose $B_n = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$. Soit $G_n$ la fonction de répartition de $B_n$. Calculer $G_n(a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$$

   Comment interpréter ce résultat?

5. Les variables aléatoires $A_n$ et $B_n$ sont-elles indépendantes?